Kapitola 4

LIMITA FUNKCE

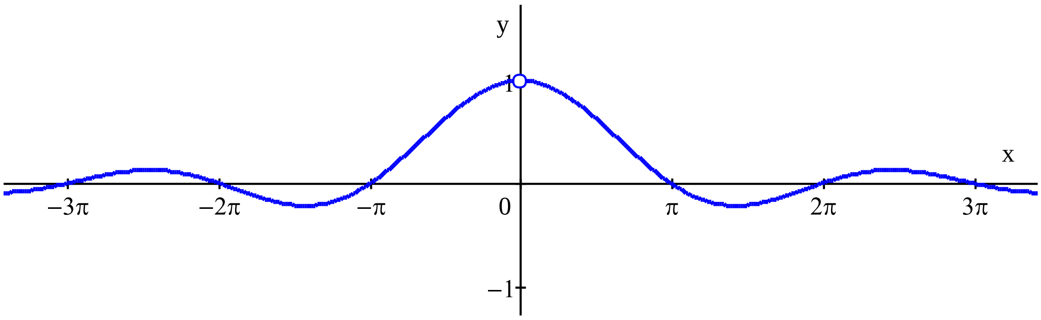
Kapitola je věnována limitě funkce, jednomu ze základních pojmů matematické analýzy. Pomocí limity budeme později definovat spojitost a derivaci funkce a také určitý integrál. Je proto potřeba věnovat pochopení pojmu limity a technice jejího výpočtu patřičnou pozornost.

4.1 Pojem limity funkce a její vlastnosti

Dosud jsme počítali funkční hodnotu v bodech, ve kterých funkce existovala. V opačném případě jsme konstatovali, že funkce není v takovém bodě definovaná. Nyní se budeme zabývat funkcí v okolí určitého bodu, bez ohledu na to, zda je či není v tomto bodě definovaná. A právě chování funkce v blízkém okolí tohoto bodu bude charakterizovat limita.

Motivační úloha k limitě funkce

Budeme sledovat chování funkce $y = \dfrac{\sin x}{x}$ v okolí bodu $x = 0$.



V tomto bodě není daná funkce definovaná, ale budeme-li dosazovat za proměnnou x čísla, která se blíží číslu 0, budou se funkční hodnoty blížit číslu 1. Tuto hodnotu nazýváme limitou funkce $y = \dfrac{\sin x}{x}$ pro x blížící se číslu 0. V definici limity však musíme precizovat pojem „blížit se číslu“. K tomu budeme používat pojem obolí bodu.

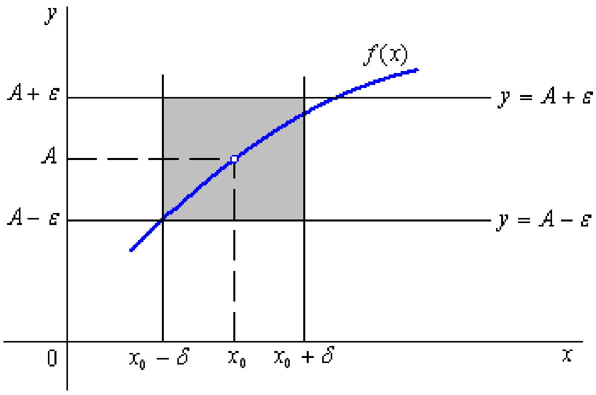
Limita funkce

Definice 4.1.: Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu A, jestliže ke každému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro všechna x, která patří do ryzího δ okolí bodu x_0, platí $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Poznámka: Uvedená definice zavádí vlastní limitu ve vlastním bodě (vlastní rozuměj konečný). Další případy limity budou uvedeny později.

Jak je zřejmé z předchozího příkladu a z definice limity v bodě x_0, hodnota limity nezávisí na funkční hodnotě v tomto bodě. V tomto bodě nemusí být funkce vůbec definovaná.
Definice limity z geometrického hlediska vyjadřuje skutečnost, že pro všechny funkční hodnoty v příslušném ryzím δ okolí bodu x_0 platí nerovnost $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$. Zvolíme-li tedy libovolné reálné číslo $\varepsilon > 0$ a se-strojíme-li pás tvořený přímkami o rovnici $y = A \pm \varepsilon$, pak existuje ryzí δ okolí bodu x_0 tak, že graf funkce $f(x)$ leží pro x z tohoto okolí mezi rovnoběžkami $y = A \pm \varepsilon$.



Jednoznačnost limity

Věta 4.2.: Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Funkce tedy limitu v bodě x_0 mít může, ale nemusí. Pokud ale funkce limitu v tomto bodě má, je pouze jediná.

Příklad 4.1.

Ukažte, že limita funkce $f: y = x$ pro $x \to 2$ je rovna číslu 2.

Řešení: Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné reálné číslo. Položme $\delta = \varepsilon$. Pak pro všechna čísla *x*, pro která platí $0 < |x-2| < \delta$ je $|f(x)-2| = |x-2| < \delta = \varepsilon.$

Tedy $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$.

Příklad 4.2.

Určete $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4 + x^2}{x^2}$.

Řešení: V bodě $x = 0$ není funkce $f(x)$ definována. Pro *x* blízká nule jsou hodnoty $f(x)$ uvedeny v tabulce:

x	$-0{,}1$	$0{,}1$	$-0{,}01$	$0{,}01$	$-0{,}001$	$0{,}001$
$f(x)$	1,01	1,01	1,0001	1,0001	1,000 001	1,000 001

Pokud se *x* přibližuje k nule, funkční hodnoty se blíží číslu jedna. Zdá se tedy, že by mohlo platit $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. To je ovšem nutné dokázat.

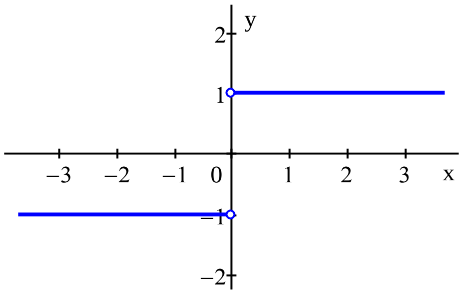
Nechť je dáno číslo $\varepsilon > 0$. Je třeba najít takové číslo $\delta > 0$, aby pro všechna čísla *x*, která patří do ryzího δ okolí bodu 0, platilo $|f(x)-1| < \varepsilon.$ Tedy musí platit

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^4 + x^2}{x^2} - 1 \right| < \varepsilon .$$

Pro $x \neq 0$ však platí $\frac{x^4+x^2}{x^2} = \frac{x^2.(x^2+1)}{x^2} = x^2+1$, proto se předchozí implikace zjednoduší na tvar $0 < |x| < \delta \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$. Aby tato implikace platila, stačí při daném ε zvolit $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Motivační úloha k jednostranné limitě

Budeme se zabývat limitou funkce $y = \frac{|x|}{x}$ v bodě $x = 0$.



Z obrázku je vidět, že v bodě $x = 0$ limita dané funkce neexistuje. Budeme-li však uvažovat pouze levé okolí bodu $x = 0$ (tedy budeme-li se k tomuto bodu blížit zleva), budou se funkční hodnoty blížit hodnotě -1. Budeme-li uvažovat pravé okolí bodu $x = 0$ (tedy budeme-li se k tomuto bodu blížit zprava), budou se funkční hodnoty blížit hodnotě 1.
Uvedený příklad zdůvodňuje zavedení pojmu limita zleva (zprava).

Definice jednostranné limity

Definice 4.3.: Jestliže v definici limity nahradíme pojem ryzí δ okolí pojmem levé (pravé) ryzí δ okolí, dostaneme definici limity zleva (zprava). Mluvíme o jednostranných limitách.

Píšeme $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$)

Vztah oboustranné limity a jednostranných limit

Věta 4.4.: Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu A, právě když platí

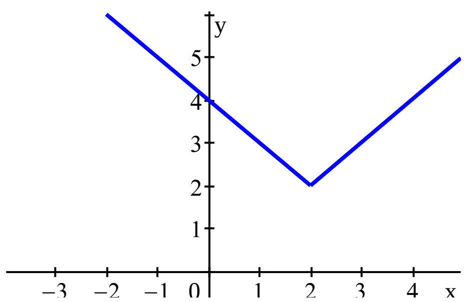
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

Poznámka: Aby existovala oboustranná limita, musí tedy existovat obě jednostranné limity a jejich hodnoty se musí rovnat a naopak, pokud existují obě jednostranné limity a jejich hodnota je stejná, existuje i oboustranná limita a má tutéž hodnotu.

Demonstrace věty 4.4.

Funkce $f(x)$ je definovaná předpisem $f: \begin{cases} y = 4 - x & \text{pro } x \in (-\infty, 2), \\ y = x & \text{pro } x \in \langle 2, \infty). \end{cases}$

Stejně jako v příkladě 4.2. se dá ukázat, že platí $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$, proto i $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2$. Chování funkce je zřejmé i z grafu :



Počítat limitu funkce na základě její definice by bylo velmi pracné. Proto se při počítání konkrétních limit budeme opírat o následující pravidla.

Pravidla pro počítání s limitami

Věta 4.5.: Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ a $c \in \mathbf{R}$. Pak platí :

$$\lim_{x\to x_0}(c.f(x)) = c.A\,, \qquad \lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B\,,$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x).g(x)) = A.B\,, \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ je-li } B \neq 0\,.$$

Postup při počítání limit

Limity elementárních funkcí v bodech, ve kterých jsou tyto funkce definovány, existují a jsou rovny funkční hodnotě. Při výpočtu limit těchto funkcí proto vždy nejprve ověříme, zda je funkce v daném bodě definovaná. Pokud ano, je limita rovna funkční hodnotě. Stejně se počítají limity funkcí, které vznikly z elementárních funkcí racionálními operacemi, tedy sčítáním, odčítáním, násobením a dělením.

Příklad 4.3.

Vypočtěte limity funkcí: a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+4}{x^2+1}$, b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin x + \cos x)$.

Řešení: a) Racionální funkce $y = \dfrac{3x+4}{x^2+1}$ je definovaná v **R**, proto $\forall a \in \mathbf{R}$ je $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3x+4}{x^2+1}$ rovna funkční hodnotě. Tedy $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+4}{x^2+1} = \dfrac{3.2+4}{2^2+1} = 2$.

b) Goniometrické funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou definované v **R**, proto $\forall a \in \mathbf{R}$ je $\lim\limits_{x\to a}(\sin x + \cos x)$ rovna funkční hodnotě v bodě a.

Tedy $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(\sin x + \cos x) = \sin\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Neurčité výrazy

Při počítání limit se často budeme setkávat s limitami podílu, rozdílu, součinu a mocnin funkcí, kdy limity jednotlivých funkcí budou existovat, ale limita příslušné operace neexistuje.
Tyto limity budeme nazývat limitami „neurčitých výrazů“.

Například, pokud platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, pak podíl $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ pro $x \to x_0$ nazýváme neurčitým výrazem (a jeho limitu limitou) typu $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$.

Podobně se definují další typy neurčitých výrazů: $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$, $\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|$, $\|0\cdot\infty\|$, $\|\infty-\infty\|$, $\|1^\infty\|$, $\|\infty^0\|$, $\|0^0\|$.

S prvním typem se setkáme v této podkapitole, ostatní probereme podrobně později, až se naučíme derivovat.
Při výpočtu limity v bodě, ve kterém funkce není definovaná, je možné často využít následující větu.

Věta pro počítání limit

Věta 4.6.: Nechť limita $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ a nechť existuje ryzí okolí bodu x_0 tak, že pro všechna x z tohoto okolí platí $f(x) = g(x)$. Pak také $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Příklad 4.4.

Vypočítejte limity: a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$, b) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Řešení: Ve všech případech dostaneme po dosazení příslušné hodnoty za x neurčitý výraz typu $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$. Větu o limitě podílu tedy nemůžeme použít. Naším cílem proto bude tyto neurčité výrazy odstranit. Dosáhneme toho úpravou daných funkcí a následným krácením. Pak použijeme větu 4.6.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1).(x+1)}{(x+1).(x+2)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{-1-1}{-1+2}=-2$

b) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}\cdot\dfrac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{4-(x-3)}{(x^2-49).(2+\sqrt{x-3})}=$

$=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{7-x}{(x-7).(x+7).(2+\sqrt{x-3})}=\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{-1}{(x+7).(2+\sqrt{x-3})}=\dfrac{-1}{(14).(2+\sqrt{4})}=-\dfrac{1}{56}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left\|\dfrac{0}{0}\right\|=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}.\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2.(1+\cos x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2.(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

Při výpočtu poslední limity jsme využili toho, že platí $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

!*!Limita složené funkce

Věta 4.7.: Nechť je dána složená funkce $y=F(x)=f(\varphi(x))$. Potom jestliže

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ a $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$, platí $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(u_0)$,

b) $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=L$ a jestliže existuje ryzí okolí bodu u_0 ve kterém $\varphi(x)\neq u_0$, platí $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=L$.

Příklad 4.5.

Vypočítejte $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x+6}$.

Řešení: Označme $u=x+6=\varphi(x)$, $f(u)=f(\varphi(x))=\sqrt[3]{u}$.

Potom $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+6)=8=u_0$ a $\lim\limits_{u\to 8}\sqrt[3]{u}=\sqrt[3]{8}=2$.

Úlohy 4.1.

Vypočtěte limity funkcí:

1. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^3}{x^2+2}$, b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}2x^2.\sin x$, c) $\lim\limits_{x\to 0}(2x-1)e^{3x}$.

2. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2+5x+6}$, c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+4x+3}{x^3+1}$, d) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2}{x+1}$, e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^3-1}$.

3. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$, d) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$,

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-(x+1)}{\sqrt{x+1}-1}$.

4. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$, c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$, d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x.\cos x}{2x}$, e) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$.

5. a) $\lim\limits_{x \to e} \operatorname{arctg}(\ln x)$, b) $\lim\limits_{x \to 0} \arccos \dfrac{x}{x+1}$, c) $\lim\limits_{x \to 0} \sin\left(\ln \dfrac{x+1}{x-1}\right)$, d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin(3x+1)}{x}\right)^{x+2}$.

Výsledky úloh 4.1.

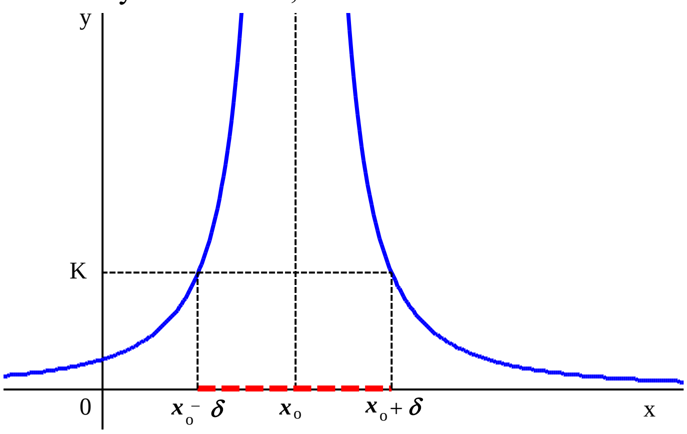
1. a) $\dfrac{1}{2}$, b) $\dfrac{\pi^2}{2}$, c) -1. 2. a) -1, b) -3, c) $\dfrac{2}{3}$, d) 1, e) $\dfrac{1}{3}$. 3. a) $\dfrac{1}{2}$, b) $\dfrac{1}{4}$, c) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, d) $-\dfrac{1}{3}$, e) -1. 4. a) 3, b) $\dfrac{2}{3}$, c) 2, d) 1, e) $\cos a$. 5. a) $\dfrac{\pi}{4}$, b) $\dfrac{\pi}{2}$, c) 0, d) 9.

4.2 Nevlastní limita funkce

Doposud jsme mluvili o vlastní limitě ve vlastním bodě. Nyní se budeme zabývat limitou ve vlastním bodě, která bude nabývat nevlastní hodnoty, tedy hodnoty $\pm\infty$.

Motivační úloha k nevlastní limitě

Funkce $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ není definovaná v bodě $x = 1$. Budeme-li sledovat její funkční hodnoty v okolí tohoto bodu, vidíme, že ať se k němu blížíme zleva nebo zprava, funkční hodnoty budou neohraničeně stoupat. Pro libovolně velké číslo K budeme umět vždy najít okolí bodu $x = 1$, v němž funkční hodnoty budou větší, než zvolené číslo K.



Na základě popsané úvahy můžeme přistoupit k definici nevlastní limity.

Nevlastní limita

Definice 4.8.: Funkce má v bodě x_0 nevlastní limitu $+\infty(-\infty)$, když ke každému číslu $K > 0$ ($K < 0$) existuje takové ryzí δ okolí bodu x_0, že pro všechna x z tohoto okolí platí $f(x) > K$ ($f(x) < K$).

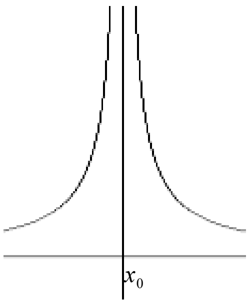
Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$).

Nevlastní limita vyjadřuje skutečnost, že v okolí bodu x_0 funkce roste nebo klesá nade všechny meze.

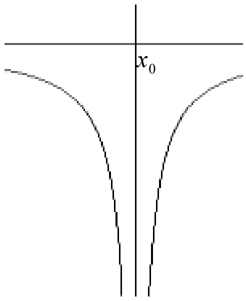
Analogicky jako u vlastní limity ve vlastním bodě definujeme nevlastní limitu zleva a zprava. Také zde platí tvrzení, že oboustranná (nevlastní) limita existuje, právě když existují obě jednostranné (nevlastní) limity a jsou sobě rovné.

K nevlastním limitám docházíme nejčastěji při výpočtu limity podílu funkcí $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, kdy po dosazení dostaneme výraz typu $\left\|\dfrac{k}{0}\right\|$.

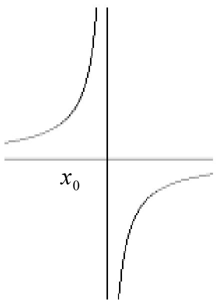
Jde-li například o racionální lomenou funkci, definovanou v okolí bodu x_0, nastává při výpočtu limity v tomto bodě jeden z následujících 4 případů :



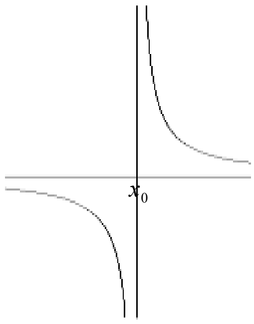
$L=+\infty=P$
limita existuje



$L=-\infty=P$
limita existuje



$L=+\infty\neq P=-\infty$
limita neexistuje



$L=-\infty\neq P=+\infty$
limita neexistuje

Poznámka: Jestliže aspoň jedna z jednostranných limit funkce $f(x)$ ve vlastním bodě x_0 existuje a je nevlastní, říkáme, že přímka $x=x_0$ je asymptotou bez směrnice grafu funkce $f(x)$.

K rozhodnutí, zda nevlastní limita existuje a jakou má hodnotu, používáme následující větu.

Věta o výpočtu nevlastní limity

Věta 4.9.: Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. Potom, jestliže v levém i pravém okolí bodu x_0 platí : a) $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$, je $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$,

b) $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$, je $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$,

c) podíl $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ má různá znaménka, limita neexistuje.

Poznámka: Při výpočtu nevlastních limit budeme symbolem $+0\,(-0)$ značit skutečnost, že limita $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, ale v ryzím okolí bodu x_0, případně v ryzím jednostranném okolí bodu x_0, je funkce $g(x)$ kladná (záporná). Tedy podle věty 4.9. je např. $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=\left\|\dfrac{1}{+0}\right\|=\infty$.

Podobně bychom psali $\left\|\dfrac{-1}{+0}\right\|=-\infty$, $\left\|\dfrac{1}{-0}\right\|=-\infty$, $\left\|\dfrac{-1}{-0}\right\|=\infty$.

Příklad 4.6.

Vypočtěte: a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$, b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3}{\ln(x+2)}$, c) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x-\dfrac{2x+1}{(x-3)^2}\right)$.

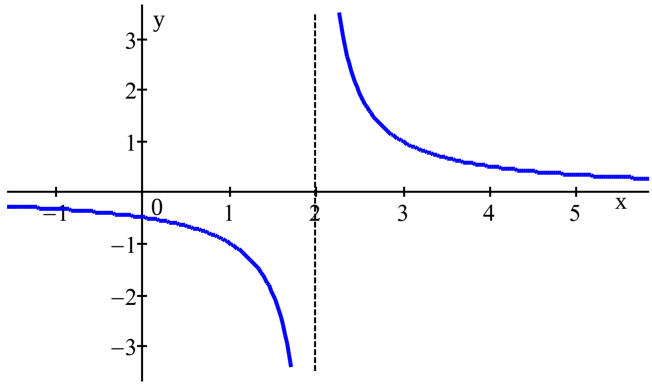
Řešení: a) Po dosazení dostaneme $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}=\left\|\frac{1}{0}\right\|$. Jde tedy o nevlastní limitu. Při jejím výpočtu postupujeme tak, že určíme obě jednostranné limity a jejich porovnáním usuzujeme na existenci a hodnotu zadané limity.

$$L=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=\left\|\frac{1}{-0}\right\|=-\infty$$

$$P=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=\left\|\frac{1}{+0}\right\|=\infty$$

Vzhledem k tomu, že $L\neq P$, daná limita neexistuje. V bodě $x=2$ existují pouze obě jednostranné limity.

Z geometrického hlediska tento výsledek znamená, že graf funkce $y=\frac{1}{x-2}$ má asymptotu $x=2$, přičemž v levém okolí tohoto bodu funkce neohraničeně klesá a v pravém okolí neohraničeně roste.



b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3}{\ln(x+2)}=\frac{(-1)^3}{\ln 1}=\left\|\frac{-1}{0}\right\|\Rightarrow$ jde o nevlastní limitu.

$L=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{x^3}{\ln(x+2)}=\left\|\frac{-1}{-0}\right\|=+\infty$ (při určování znaménka výrazu $\ln(x+2)$ v ryzím levém okolí bodu $x=-1$ si můžeme představit, že za x dosazujeme hodnotu $-1-t$ ($t>0$), tedy $\ln(x+2)=\ln(-1-t+2)=\ln(1-t)<0$),

$P=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x^3}{\ln(x+2)}=\left\|\frac{-1}{+0}\right\|=-\infty$ (při určování znaménka výrazu $\ln(x+2)$ v ryzím pravém okolí bodu $x=-1$si můžeme představit, že dosazujeme za x hodnotu $-1+t$ ($t>0$), tedy $\ln(x+2)=\ln(-1+t+2)=\ln(1+t)>0$).

Vzhledem k tomu, že $L\neq P$, daná limita neexistuje.

c) $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x-\frac{2x+1}{(x-3)^2}\right)=\lim\limits_{x\to 3}2x-\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x+1}{(x-3)^2}=9-\left\|\frac{7}{0}\right\|\Rightarrow$ jde o nevlastní limitu.

$L=\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{2x+1}{(x-3)^2}=\left\|\frac{7}{+0}\right\|=\infty$, $P=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{2x+1}{(x-3)^2}=\left\|\frac{7}{+0}\right\|=\infty$

Vzhledem k tomu, že $L=P$, limita $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x+1}{(x-3)^2}$ existuje a má hodnotu ∞.

Tedy celkem $\lim\limits_{x\to 3}\left(2x-\frac{2x+1}{(x-3)^2}\right)=9-\infty=-\infty$.

Také pro počítání nevlastních limit složených funkcí je možné využít větu 4.7.

Příklad 4.7.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(\frac{1}{x})$.

Řešení: $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(\infty) = \infty$

Úlohy 4.2.

1. Vypočítejte limity funkcí: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$, b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{arccotg}\frac{1}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x\text{-}1}$.

2. Vypočítejte limity funkcí: a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x+2}{x-3}$, b) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{4x}{(x+1)^2}$, c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+2}{\ln(x-1)}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3-x^2}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1-x}{x}}$, f) $\lim\limits_{x\to 2^+} \ln\frac{1}{x(x-2)}$, g) $\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$, i) $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{3x}{\sin(x-\pi)}$.

Výsledky úloh 4.2.

1. a) ∞, 0, b) 0, c) $\frac{\pi}{2}$.

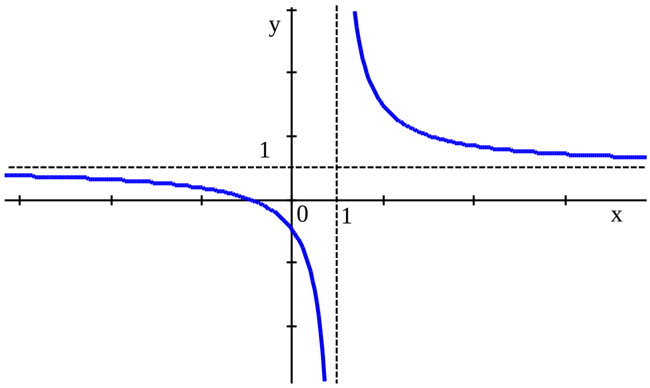
2. a) neexistuje, b) $-\infty$, c) neexistuje, d) $-\infty$, e) neexistuje, f) $+\infty$, g) $-\frac{\pi}{2}$, h) 0, i) neexist.

4.3 Limita v nevlastním bodě

Zbývá popsat ještě jeden typ limity. Je to limita, kdy $x \to \pm\infty$. Tato limita v nevlastním bodě může nabývat vlastní nebo i nevlastní hodnoty.

Motivační úloha k limitě v nevlastním bodě

Graf funkce $y = \frac{x+1}{x-1}$ má tvar:



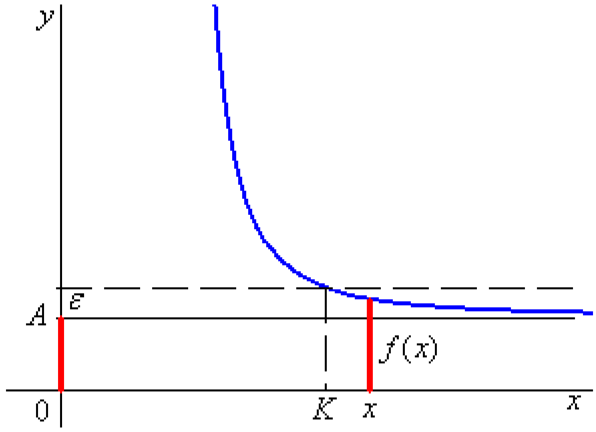
Když proměnná x roste nade všechny meze (tedy $x \to \pm\infty$), funkční hodnoty se blíží číslu 1.

Budeme proto psát $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$.

Limita v nevlastním bodě

Definice 4.10.: Funkce má v nevlastním bodě $+\infty$ $(-\infty)$ limitu A, když ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $K > 0$, že pro všechna $x > K$ $(x < -K)$ platí $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Geometrické znázornění definice 4.10. pro případ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$:



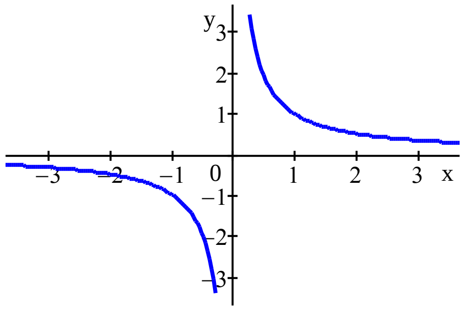
Poznámka: Jestliže $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = q$, říkáme, že přímka $y = q$ je vodorovnou (nebo horizontální) asymptotou grafu funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$. Podobně se definuje vodorovná asymptota v bodě $-\infty$.

Příklad 4.8.

Vypočítejte limity funkcí: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$, b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x^3 - x^2 + 3x + 1\right)$, c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 1}{4x^3 + x - 1}$, d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2 - 3}$, e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 2}{x + 1}$.

Řešení: a) Funkce $f : y = \frac{1}{x}$ je v intervalu $(0, +\infty)$ klesající a platí, že pro x rostoucí nade všechny meze jsou odpovídající funkční hodnoty $f(x) = \frac{1}{x}$ stále menší a blíží se číslu 0. Pro každé číslo $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $K = \frac{1}{\varepsilon}$, že pro všechny hodnoty $x > K = \frac{1}{\varepsilon}$ platí $|f(x) - A| = \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

Tedy $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Popsanou úvahu potvrzuje graf funkce



b) Pro limitu polynomu v nevlastních bodech platí:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n) = a_0 \lim_{x \to \pm\infty} x^n.$$

Tedy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2+3x+1\right)=2\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$.

c-e) Při výpočtu limit racionálních lomených funkcí v nevlastním bodě postupujeme tak, že vytkneme v čitateli i ve jmenovateli činitele s nejvyšší mocninou *x*, vykrátíme a využijeme toho, že platí $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$, kde $n\in\mathbf{N}$.

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{4x^3+x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3.\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3.\left(4+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{4+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1+0}{4+0-0}=\frac{1}{4},$$

d) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2.\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x.\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{2}{-\infty.(1-0)}=\frac{2}{-\infty}=0,$$

e) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\infty\cdot(3+0)}{1+0}=\frac{\infty}{1}=\infty.$$

Pro výpočet limit racionální lomené funkce $y=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ v nevlastním bodě můžeme použít následující jednoduché pravidla, které vyplývá z uvedených tří příkladů:

- Je-li stupeň *m* polynomu v čitateli stejný jako stupeň *n* polynomu ve jmenovateli, je limita rovna podílu koeficientů u nejvyšších mocnin proměnné *x*
- Je-li stupeň *m* polynomu v čitateli menší než stupeň n polynomu ve jmenovateli, je limita rovna nule,
- Je-li stupeň *m* polynomu v čitateli větší než stupeň *n* polynomu ve jmenovateli, jde o nevlastní limitu.

Také pro počítání limit složených funkcí v nevlastním bodě je možné využít větu 4.7.

Příklad 4.9.

Vypočtěte limitu složené funkce: a) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{4x+3}{5x-2}$, b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arcsin\frac{4-2x}{2x+3}$.

Řešení: a) $$\lim_{x\to\infty}\ln\frac{4x+3}{5x-2}=\ln\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot(4+\frac{3}{x})}{x\cdot(5-\frac{2}{x})}=\ln\lim_{x\to\infty}\frac{(4+0)}{(5-0)}=\ln\frac{4}{5},$$

b) $$\lim_{x\to-\infty}\arcsin\frac{4-2x}{2x+3}=\arcsin\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot(\frac{4}{x}-2)}{x\cdot(2+\frac{3}{x})}=\arcsin\lim_{x\to-\infty}\frac{(0-2)}{(2+0)}=\arcsin\lim_{x\to-\infty}(-1)=$$

$$=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}.$$

Úlohy 4.3.

1. S využitím znalostí o grafu funkce vypočítejte limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{1-\ln x}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} 3^x . x$, c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{1+2\operatorname{arctg} x}$, d) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\sqrt{2x}}$, f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\operatorname{arctg} x}$.

2. Vypočítejte limity : a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (4x^3-4x-3)$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+x-2}{6x^3+x^2-2x+3}$, c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$,

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$, e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$, f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x}\right)$, g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1}$,

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \arccos\dfrac{1-x}{x+2}$, i) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos(e^{-x})$, j) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

Výsledky úloh 4.3.

1., a) 0, b) ∞, c) $\dfrac{3}{1-\pi}$, d) $\dfrac{\pi}{2}$, e) 0, f) ∞.

2. a) $+\infty$, b) $\dfrac{1}{3}$, c) $+\infty$, d) 0, e) 0, f) $+\infty$, g) $\dfrac{1}{2}$, h) π, i) 1, j) 0.

4.4 Spojitost funkce

V matematice a jejích aplikacích se nejčastěji setkáváme s funkcemi, které mají limitu rovnou funkční hodnotě. Tyto funkce budeme nazývat spojité. Spojitost funkce se ukáže jako důležitá vlastnost, která bude podmínkou pro platnost řady dalších vztahů a existenci pojmů.

Spojitost funkce v bodě

Definice 4.11.: Funkce se nazývá spojitá v bodě x_0, je-li v tomto bodě definovaná a platí $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

O spojitosti budeme mluvit pouze ve vlastních bodech, v nevlastních bodech spojitost neuvažujeme.

Poznámka: Nahradíme-li v definici spojitosti pojem limita pojmem limita zleva (zprava), dostaneme definici funkce spojité v bodě x_0 zleva (zprava). Tento pojem budeme potřebovat, abychom mohli rozšířit spojitost funkce v určitém bodě na spojitost funkce v celém intervalu.

Spojitost funkce na intervalu

Definice 4.12.: Říkáme, že funkce je spojitá na otevřeném intervalu, je-li spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu.
Říkáme, že funkce je spojitá na uzavřeném intervalu, je-li spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu a v levém (pravém) krajním bodě intervalu je spojitá zprava (zleva).

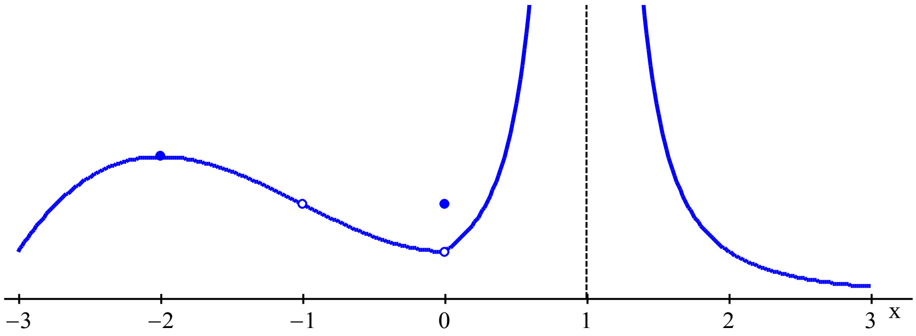
Elementární funkce jsou spojité ve všech bodech, ve kterých jsou definované. U těchto funkcí se dá říct, že jsou spojité, můžeme-li jejich graf nakreslit jedním tahem.

Bod nespojitosti

Definice 4.13.: Bod, v němž funkce není spojitá, se nazývá bod nespojitosti.

Úloha ke spojitosti funkce

Rozhodněte o spojitosti funkce v bodech $x = -2, -1, 0, 1$ a zdůvodněte.



V bodě $x = -2$ je funkce spojitá, protože $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$.

V bodě $x = -1$ není funkce spojitá, protože $f(-1)$ neexistuje.

V bodě $x = 0$ není funkce spojitá, protože $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$.

V bodě $x = 1$ není funkce spojitá, protože $f(1)$ neexistuje.

Body $x = -1, 0, 1$ jsou tedy body nespojitosti dané funkce.

Příklad 4.10.

Určete body nespojitosti dané funkce a intervaly, ve kterých je spojitá.

a) $f: y = \dfrac{2x-1}{x^2-5x+4}$, b) $f: y = \dfrac{3-x}{x^2+5}$, c) $f(x) = \begin{cases} x, & x < -3 \\ -1, & x \in \langle -3, 1 \rangle \\ x-2, & 1 < x < 4 \\ \dfrac{9}{2}x - x^2, & x \geq 4 \end{cases}$.

Řešení: a) Funkce jsou nespojité v bodech, ve kterých nejsou definovány. Určíme tedy definiční obor funkce: $x^2 - 5x + 4 \neq 0 \Rightarrow x_1 \neq 1,\ x_2 \neq 4$. Body nespojitosti jsou body $x_1 = 1,\ x_2 = 4$. Funkce je spojitá v intervalech: $(-\infty, 1),\ (1, 4), (4, +\infty)$.

b) Protože pro všechna reálná čísla platí, že $x^2 + 5 \neq 0$, nemá funkce body nespojitosti. Je tedy spojitá v **R**.

c) Některé funkce jsou definovány i v bodech nespojitosti, ale jejich grafy jsou v těchto bodech „přerušeny“ (nelze je nakreslit jedním tahem).

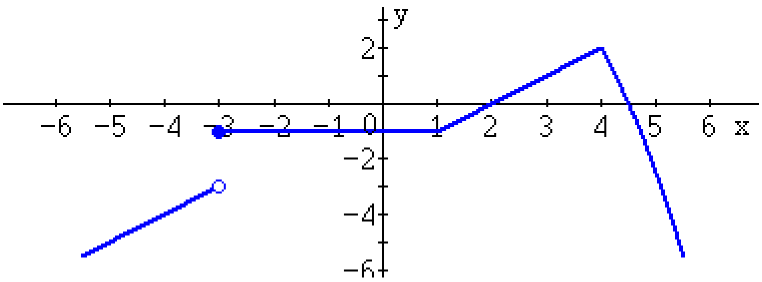
Vypočítáme limity funkce a funkční hodnoty v krajních bodech jednotlivých intervalů :

$\lim\limits_{x \to -3^-} x = -3$, $\lim\limits_{x \to -3^+} (-1) = f(-3) = -1$,

$\lim\limits_{x \to 1^-} (-1) = f(1) = -1$, $\lim\limits_{x \to 1^+} (x-2) = -1$,

$\lim\limits_{x \to 4^-} (x-2) = 2$, $\lim\limits_{x \to 4^+} \left(\dfrac{9}{2}x - x^2 \right) = f(4) = 2$.

Z uvedených výpočtů i z grafu funkce je zřejmé, že bodem nespojitosti je pouze bod $x = -3$. Funkce je spojitá v intervalech $(-\infty, -3), (-3, +\infty)$:



Úlohy 4.4.

Určete body nespojitosti dané funkce a intervaly, ve kterých je spojitá:

a) $f: y = \dfrac{3x+4}{x^2+1}$, b) $f: y = \dfrac{3x^2-x}{x}$, c) $f: y = \dfrac{x^2+4x+3}{x^3+1}$, d) $f: y = \operatorname{arctg} x$.

Výsledky úloh 4.4.

a) funkce nemá body nespojitosti, je spojitá v **R**,

b) bod nespojitosti je 0, funkce je spojitá v intervalech $(-\infty, 0), (0, +\infty)$,

c) bod nespojitosti je –1, funkce je spojitá v intervalech $(-\infty, -1), (-1, +\infty)$,

d) funkce nemá body nespojitosti, je spojitá v **R**.

4.5 !*!Asymptoty grafu funkce

S pojmem asymptota jsme se setkali ve druhé kapitole v souvislosti s grafy funkcí. Připomeňme, že asymptota grafu funkce je přímka, ke které se graf funkce přibližuje, vzdalujeme-li se od počátku. Budeme rozlišovat dva typy asymptot: bez směrnice a se směrnicí.

Asymptota bez směrnice

Definice 4.14.: Řekneme, že přímka $x = x_0$ je asymptotou bez směrnice grafu funkce $y = f(x)$, jestliže funkce má ve vlastním bodě x_0 nevlastní limitu zprava nebo zleva.

Asymptota bez směrnice se někdy nazývá též svislá asymptota nebo asymptota rovnoběžná s osou *y*. Budeme ji hledat v bodech nespojitosti dané funkce a v krajních bodech definičního oboru (je-li tímto krajním bodem vlastní bod). Pokud v některém z těchto bodů platí aspoň jeden ze vztahů $\lim\limits_{x\to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$, je přímka $x = x_0$ asymptotou bez směrnice dané funkce.

Příklad 4.11.

Určete asymptoty bez směrnice grafu funkce $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - x}$.

Řešení: Body nespojitosti funkce jsou body $x_1 = 0,\ x_2 = 1$. Pro nalezení asymptot bez směrnice je třeba určit jednostranné limity v bodech 0 a 1 :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(x^2+1)(x-1)}{x\cdot(x-1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = \left\|\frac{1}{-0}\right\| = -\infty,$$

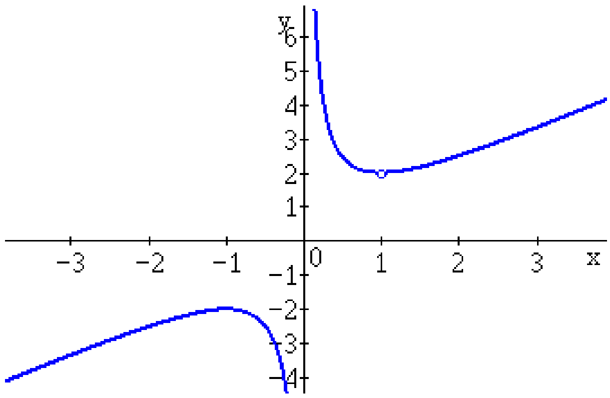
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(x^2+1)(x-1)}{x\cdot(x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = \left\|\frac{1}{+0}\right\| = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x} = 2,$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x} = 2.$$

Tedy asymptotou bez směrnice je pouze přímka $x = 0$. Zleva od ní funkce neohraničeně klesá, zprava od ní funkce neohraničeně roste. Tuto skutečnost budeme značit symbolem: $\_|^{+}$.

V bodě $x = 1$ nemá funkce nevlastní limitu, takže zde asymptotu bez směrnice nemá.



Asymptota se směrnicí

Definice 4.15.: Přímka o rovnici $y = kx + q$ se nazývá asymptotou se směrnicí grafu funkce $y = f(x)$ pro $x \to \infty$, jestliže platí $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - (kx+q)\big) = 0$.

Zaměníme-li ∞ za $-\infty$, dostaneme definici asymptoty se směrnicí v bodě $-\infty$.

Asymptota se směrnicí (někdy se nazývá též asymptota různoběžná s osou *y*) je přímka, ke které se přibližuje graf funkce $f(x)$ pro $x \to \pm\infty$.
Zvláštním případem asymptoty se směrnicí je vodorovná asymptota (viz podkapitola 4.3.), kdy koeficient přímky $k = 0$.

Věta o asymptotě se směrnicí

Věta 4.16.: Přímka o rovnici $y = kx + q$ je asymptotou se směrnicí v bodě $+\infty$, existují-li konečné limity $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ a $q = \lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - kx\big)$.

Zaměníme-li ∞ za $-\infty$, dostaneme asymptotu se směrnicí v bodě $-\infty$.

Je zřejmé, že každá funkce může mít nejvýše dvě asymptoty se směrnicí (jednu pro $x \to +\infty$ a jednu pro $x \to -\infty$), ale nekonečně mnoho asymptot bez směrnice (např. funkce $y = \mathrm{tg}\,x$).

Příklad 4.12.

Určete asymptoty grafu funkce: a) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x+1}$, b) $g(x) = \dfrac{e^x}{2-x}$.

Řešení: a) Asymptoty bez směrnice.
Bodem nespojitosti funkce je bod $x = -1$. Pro nalezení asymptoty bez směrnice je třeba určit jednostranné limity v tomto bodě :

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2+3x+1}{x+1} = \left\| \frac{1}{-0} \right\| = -\infty, \quad \lim_{x\to-1^+} \frac{x^2+3x+1}{x+1} = \left\| \frac{1}{+0} \right\| = +\infty.$$

Tedy asymptotou bez směrnice je přímka $x = -1$. Zleva od ní funkce neohraničeně klesá, zprava od ní funkce neohraničeně roste. Stručné označení: $\_|^{+}$.

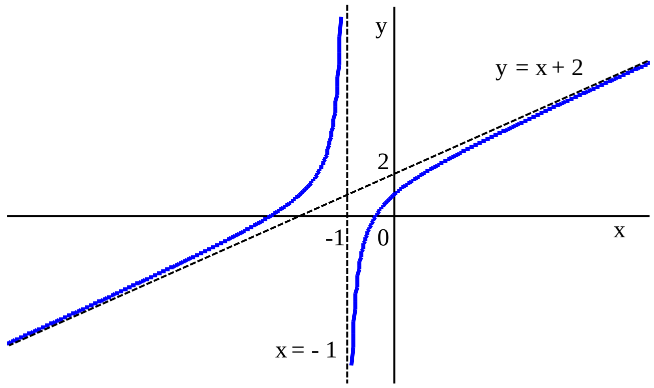
Asymptoty se směrnicí.
Koeficienty asymptoty se směrnicí (pokud existuje) určíme pomocí limit:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^2+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\cdot\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$$

$$=\frac{(1+0+0)}{(1+0)}=1$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x+1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)=2$$

Tedy asymptotou bez směrnice je přímka $y=x+2$.



b) Asymptoty bez směrnice.

Bodem nespojitosti funkce je bod $x=-2$. Pro nalezení asymptoty bez směrnice je třeba určit jednostranné limity v tomto bodě:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{e^x}{2-x}=\left\|\frac{e^2}{+0}\right\|=\infty,\ \lim_{x\to 2^+}\frac{e^x}{2-x}=\left\|\frac{e^2}{-0}\right\|=-\infty.$$

Tedy asymptotou bez směrnice je přímka $x=2$. Zleva od ní funkce neohraničeně roste, zprava od ní funkce neohraničeně klesá: $^+|_-$.

Asymptoty se směrnicí.

Koeficienty asymptoty se směrnicí (pokud existuje) určíme pomocí limit:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{e^x}{2-x}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^x}{x(2-x)}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x(2-x)e^{-x}}=\dfrac{1}{-\infty\cdot\infty\cdot\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x(2-x)}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2-2x}=\left\|\dfrac{\infty}{\infty}\right\|=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{-2}=-\infty\end{cases}$$

Koeficient q asymptoty se směrnicí budeme tedy počítat pouze pro $x\to-\infty$.

$q=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^x}{2-x}-0\right)=\dfrac{0}{\infty}=0$. Asymptota bez směrnice je přímka $y=0$.

Úlohy 4.5.

1. Určete asymptoty bez směrnice daných křivek:

a) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, b) $y=\dfrac{e^x}{x+2}$, c) $y=\dfrac{\ln x}{x}$, d) $y=\dfrac{\ln x}{\ln(x-2)}$.

2. Určete asymptoty daných křivek :

a) $y=\dfrac{x^2}{3x+1}$, b) $y=2x+\dfrac{2}{x-1}$, c) $y=\dfrac{2x}{(x-3)^2}$, d) $y=e^{\frac{1}{x}}$, e) $y=\operatorname{arccotg}\dfrac{1}{x}$.

Výsledky úloh 4.5.

1. a) $x=1,\ x=-1$, b) $x=-2$, c) $x=0$, d) $x=3$. 2. a) $x=-\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{9}$, b) $x=1,\ y=2x$, c) $x=3,\ y=0$, d) $x=0,\ y=1$, e) bez směrnice nemá, $y=\dfrac{\pi}{2}$.

Shrnutí kapitoly

Pojem limity funkce a jednostranné limity.

Limita funkce je základním pojmem matematické analýzy. Je to číslo, k němuž se blíží hodnoty funkce $f(x)$, když se proměnná x blíží k číslu x_0 .

Jednostranné limity jsou limity, při kterých uvažujeme pouze levé (pravé) okolí bodu x_0 .

Vlastnosti limity a výpočet její hodnoty v daném bodě.

Funkce může mít v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Limita existuje právě tehdy, když existují obě jednostranné limity a mají stejnou hodnotu.

Ve vlastním bodě x_0 , v němž je funkce definovaná a spojitá, vypočítáme limitu dosazením.

Není-li funkce v bodě x_0 definovaná nebo v něm není spojitá, může po dosazení vzniknout výraz typu :

a) $\left\| \frac{k}{0} \right\|$, který vede na nevlastní limitu,

b) $\left\| \frac{0}{0} \right\|, \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$ – jde o neurčité výrazy, jejichž limitu počítáme úpravami funkce.

Limita v nevlastním bodě.

Jde o limitu, kdy $x \to \pm\infty$. Počítáme ji úpravami funkce.

Body a intervaly spojitosti funkce a body nespojitosti.

Funkce je spojitá v bodech, ve kterých se funkční hodnota rovná limitě funkce. Body, ve kterých funkce není spojitá, nazýváme body nespojitosti.

Určování asymptot grafu funkce.

Asymptota grafu funkce je přímka, ke které se graf funkce přibližuje, vzdalujeme-li se od počátku. Rozlišujeme dva typy asymptot: bez směrnice a se směrnicí. Při jejich určování využíváme limity.

Klíčové pojmy

- limita funkce,
- jednostranné limity,
- nevlastní limita,
- limita v nevlastním bodě,
- spojitost v bodě a na intervalu,
- body nespojitosti,
- asymptoty grafu funkce.

Samostatný test

A. Teoretická část

1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá :

a) Funkce má v každém bodě aspoň jednu limitu.

b) Jestliže má funkce v daném bodě obě oboustranné limity a jejich hodnota je stejná, pak existuje v tomto bodě oboustranná limita a má tutéž hodnotu.

c) Pokud není funkce v daném bodě definována, nemůže mít v tomto bodě limitu.

d) Nevlastní limita v bodě x_0 vyjadřuje skutečnost, že v okolí tohoto bodu je funkce neohraničená.

e) Bod nespojitosti funkce nikdy nepatří do jejího definičního oboru.

f) Je-li funkce v bodě spojitá, nemusí být v tomto bodě definovaná.

2. Uveďte příklady neurčitých výrazů.
3. Charakterizujte nevlastní limitu a limitu v nevlastním bodě.
4. Uveďte příklad funkce, která je nespojitá v bodě -2.
5. Uveďte příklad funkce, která je spojitá v **R**.

B. Praktická část

1.Určete limity funkce:

a) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\left(\sin x+\cos x-2x\right)$, b) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{x^2+4x-12}{x^2+10x+24}$, c) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+3x^2}{\sqrt{x+3}}$, d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{x}$, f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3+5}{x^2-5}$, g) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x}{x^2-9}$, h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$.

2. Načrtněte graf funkce, pro kterou platí :

a) má bod nespojitosti 1,

b) v bodě 1 nemá limitu,

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ a $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$,

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ a $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$.

3. Určete body nespojitosti funkcí, popřípadě intervaly, ve kterých jsou funkce spojité:

a) $y=\dfrac{x+4}{x-x^3}$, b) $y=\dfrac{x}{\cos x}$, c) $y=\sqrt{7-5x}$, d) $y=\begin{cases} x+2 & \text{pro } x\geq 2 \\ x^2 & \text{pro } x<2 \end{cases}$.